Números Reales Construibles con Regla y Compás

Crespo, Luis Fernando

Sangarí, Antonio

**Introducción**

La geometría ha ido desapareciendo progresivamente de la enseñanza media, debido a que ha perdido aplicabilidad para el alumno; la vieja geometría del triángulo, de las construcciones, no podrán volver a menos que su estudio de incentive de acuerdo con los intereses de los alumnos. Es por esto que este trabajo se va a tratar de introducir que números reales son construibles como resultado de un número finito de construcciones básicas y derivadas usando sólo regla y compás. La idea general del trabajo ha sido proporcionada por alumnos que una vez presentados los números reales, establecen una diferencia muy clara entre números como ó que saben dibujar y números como , que la teoría aseguran que están en la recta, pero que no saben dibujar con instrumentos comunes. Ello nos lleva al problema de las construcciones con regla y compás, tema superior desde luego visto en el nivel universitario.

Preguntas al resolver:

* ¿Todos los números reales se pueden construir con regla no graduada y compas?
* Si ese es el caso ¿cómo lo construimos?

La idea de este trabajo es ver qué números reales son construibles con el uso de una Regla no graduada, de un Compás, de un lápiz y una hoja.

Para los griegos la aritmética estuvo relacionada a la geometría, es decir, los números tenían razón de ser si era posible realizar su **representación geométrica**.

La regla y el compás que concebían los griegos eran ideales. Para ellos la regla ideal no tenía marcas (como las de hoy en día), con la que podían rectas y segmentos entre puntos dados, pero no medir distancia entre esos puntos

**Desarrollo del Tema**

Como contenido preliminar se instruye a los estudiantes a: dibujar puntos, utilizando solo regla y compás. Los puntos así dibujados los llamaremos construibles, y se obtienen como intersección de rectas, de círculos y rectas, y de círculos. Una recta se podrá dibujar si contiene dos puntos construibles, y una circunferencia se podrá dibujar si su centro es un punto construible, el radio es un segmento de extremos construibles. *(ARTIN, 1964)*

Daremos la definición de un número construible y mostraremos que clases de construcciones son permitidas.

**Definición**: Un **número real** se dice que es construible si el punto puede ser construido por una secuencia finita de construcciones de reglas y compás que comienzan con puntos en coordenadas enteras. *(HUNGERFORD, 1980)*

Los números construibles entonces aparecen como resultado de un número finito de construcciones básicas permitidas, las cuales son:

* Trazar una recta por dos puntos dados.
* Trazar un círculo de centro y radio dados.
* Trazar una paralela a una recta dada por un punto dado.
* Trazar la perpendicular a una recta dada por un punto dado.
* Trazar la mediatriz de un segmento, y en consecuencia, encontrar su punto medio.
* Además es importante que tengamos en cuenta que:
* El compás moderno y el ideal son equivalentes.
* Podemos hallar el punto de intersección de dos rectas, de dos círculos o de una recta y un círculo.

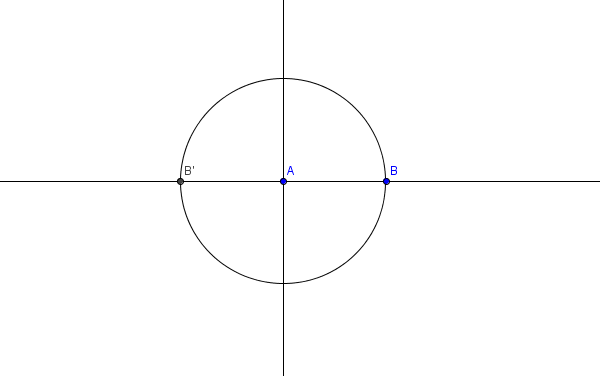
Se puede consultar *(PEREZ, 2012)* o *(IVORRA, ---)* para ampliar sobre estas construcciones.

Sabiendo esto es el momento de asignarle a cada punto construido un par de coordenadas. Para ello, necesitaremos un par de ejes cartesianos-rectangulares construibles, este resultado como los que siguen se pueden consultar de (COURANT-ROBBINS, 1979).

**Teorema**. Existe al menos un sistema de ejes cartesianos-rectangulares construibles

***Demostración***. Consideremos dos puntos construibles y . La recta y la circunferencia de centro y radio , se cortan en dos puntos y , por último construimos la mediatriz del segmento .

El sistema de ejes cartesiano-rectangulares queda determinado tomando la recta que pasa por A y B como eje X, y la mediatriz del segmento como eje Y, y el segmento como unidad de medida.



Donde los puntos A y B son: y

A partir mostremos primero que los números enteros son construibles, para ello utilizaremos dos procedimientos ya que permiten a los estudiantes adquirir el dominio de formas de razonamientos para enriquecer su manera de razonar ante problemas de diversos tipos.

**Teorema**. Los números enteros son construibles.

***Demostración 1.*** En los ejes coordenados que acabamos de construir ya tenemos el 0 y el 1. Trazando una circunferencia de centro en 1 y radio 1 (distancia entre A y B), obtenemos otro punto al cortar la circunferencia con el eje X. Ese punto seria el (2,0). Hemos construido por lo tanto el numero entero 2. Siguiendo con el proceso podemos obtener todos los números enteros positivos trazando circunferencias hacia de la derecha del 2 y los enteros negativos trazando circunferencias a la izquierda del 0.

grafica

Demostración 2. Aquí va el procedimiento del Profe Sangari.

grafica

Ahora pasaremos a mostrar que los números racionales también son construibles con el uso de regla y compás.

**Teorema**. Si y son construibles, entonces con también es construible.

Demostración. Partimos de unos ejes coordenados y dos puntos construibles sobre el eje , y Construimos el punto trazando la circunferencia de centro y radio . Trazamos la recta que pasa por y Trazamos la recta paralela que pasa por cortando al eje Y, en un punto, digamos Aplicamos ahora el teorema de Thales:

Si , entonces , y por lo tanto hemos construido el inverso de un número construible .

Con esto obtenemos además que todos los números racionales son construibles.

Ahora veamos el siguiente resultado, el cual también es:

**Teorema.** Si es un número positivo construible, entonces su raíz cuadrada también es construible.

Demostración. Partimos de unos ejes coordenados y un punto sobre el eje X, digamos . Construimos el punto tomando la distancia y trazando la circunferencia de centro y radio. Después construimos el punto (punto del segmento ). Trazamos ahora la circunferencia de centro y radio . Trazamos una paralela al eje Y que pase por el punto . Esa paralela corta a la circunferencia en un punto que llamaremos (cuya distancia al punto llamamos ). Construyendo ahora los segmentos (cuya medida llamaremos ) y (cuya medida llamaremos ). Obtenemos tres triángulos:

Aplicamos el Teorema de Pitágoras a los tres triángulos (por ser el segmento un diámetro de la circunferencia y el ángulo es recto)

Haciendo 2) y 3) en 1), obtenemos:

Entonces solo nos queda hacer trazar una circunferencia de centro y radio y la intersección con el eje X es la raíz cuadrada de .

Ahora mostraremos que si a es un número construible y b es otro número construible, entonces , y son construible.

**Proposición.** Si y son construibles, también lo es (o ).

***Demostración***. Si y son construibles, entonces son construibles y . Trazamos un círculo de centro C y radio que corta al eje X en dos puntos y situados, respectivamente a izquierda y derecha de . Entonces si , entonces y si , entonces .

Antes de pasar al producto de dos números construibles, mostraremos el siguiente resultado.

**Proposición.** Si es construibles, es también construible

***Demostración***. Si es construible, lo es Trazamos la circunferencia de centro y radio , que corta al eje en y . Entonces .

**Proposición**. Si y son construibles, también lo es

***Demostración***. Alcanza con demostrar la proposición para el caso c>0 y c>0. Si c= y d=0 es trivial. Si alguno de ellos es negativo basta con tener en cuenta la regla de los signos y aplicar la proposición anterior.

Supongamos entonces y construibles y, por lo tanto, construibles. Los puntos y y son ciertamente construibles, y como no están alineados, la circunferencia que pasa por , y es construible y cortara al eje en un nuevo punto E, de coordenadas .